D) Altre proprietà di Φ e della decomposizione di Cartan

Sappiamo (cf. A)) che se $\alpha, \beta \in H^*$, $[L_\alpha L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$. In particolare, $[H L_\beta] \subseteq L_\beta$, per ogni $\beta \in \Phi$, e $[L_\alpha L_{-\alpha}] \subseteq H$, per ogni $\alpha \in \Phi$. Sappiamo inoltre che, per ogni $\alpha, \beta \in H^*$, con $\beta \neq -\alpha$, è $L_\alpha \perp L_\beta$ (rispetto alla forma di Killing). In particolare, per ogni $\alpha \neq 0$, $H = L_0$ è ortogonale a L_α. Nella Proposizione seguente si tratta in dettaglio, fra altre cose, il caso in cui $\beta = -\alpha$.

Proposizione 3.

1) Φ genera H^* ;

2) Se $\alpha \in \Phi$, anche $-\alpha \in \Phi$;

3) Per ogni $\alpha \in \Phi$, $[L_\alpha L_{-\alpha}] = \langle t_\alpha \rangle$ (ove t_α è l'elemento di H definito in C)).
In particolare, per ogni $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$, è $[xy] = \kappa(x,y)t_\alpha$;

4) Per ogni $\alpha \in \Phi$, $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$;

5) Per ogni $\alpha \in \Phi$, si ponga $h_\alpha = 2t_\alpha / \kappa(t_\alpha, t_\alpha)$. Allora, per ogni elemento non-nullo $x_\alpha \in L_\alpha$, esiste $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tale che x_α, y_α, e $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$ generano una sottoalgebra 3-dimensionale di L, isomorfa all'algebra sl(2,F) mediante l'identificazione $x_\alpha \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $y_\alpha \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $h_\alpha \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

6) Per ogni $\alpha \in \Phi$, $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Dim.

1) Supponiamo che Φ non generi H^*, e che quindi il sottospazio $\langle \alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ abbia dimensione $r < s = \dim H^* = \dim H$. Per ogni $\alpha \in \Phi$, Ker α è un iperpiano di H, e $\bigcap_{\alpha \in \Phi}$ Ker α è lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni lineari di rango r in s incognite. Dunque $\bigcap_{\alpha \in \Phi} \operatorname{Ker} \alpha \neq \underline{0}$. In altre parole, esiste in H un elemento $h \neq 0$, tale che $\alpha(h) = 0$ per ogni $\alpha \in \Phi$. Ciò significa che $[h L_\alpha] = \alpha(h)L_\alpha = \underline{0}$ per ogni $\alpha \in \Phi$. Segue allora, essendo anche $[hH] = \underline{0}$, $[hL] = \underline{0}$, ovvero $h \in Z(L) = \underline{0}$, contraddizione.

2) Supponiamo $-\alpha \notin \Phi$. Allora $L_{-\alpha} = \underline{0}$, e quindi, tenendo conto della Proposizione 2, pto iii), si ha che $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = \underline{0}$ per ogni $\beta \in H^*$. Si conclude che $\kappa(L_\alpha, L) = \underline{0}$, contro il fatto che κ è non-degenere.

3) Sia $\alpha \in \Phi$, e siano $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Si noti innanzitutto che $[xy] \in H$, in forza del pto i) della Proposizione 2. Per ogni $h \in H$, si ha poi $\kappa(h,[xy]) = \kappa([hx], y) = \alpha(h)\kappa(x,y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x,y) = \kappa(\kappa(x,y)t_\alpha, h) = \kappa(h, \kappa(x,y)t_\alpha)$. In altre parole, H è ortogonale a $[xy] - \kappa(x,y)t_\alpha \in H$. Poichè $\kappa|_{H \times H}$ è non-degenere, si conclude che $[xy] = \kappa(x,y)t_\alpha$. Per provare l'asserto, basta ora trovare $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ tali che $\kappa(x,y) \neq 0$. A tale scopo, si osservi che, se $0 \neq x \in L_\alpha$, $\kappa(x, L_{-\alpha}) = \underline{0}$ implica $\kappa(x, L) = \underline{0}$ (cf.2)), contro il fatto che κ è non-degenere. Dunque esiste $y \in L_{-\alpha}$ tale che $\kappa(x,y) \neq 0$.

4) Supponiamo $\alpha(t_\alpha) = 0$. Allora, per ogni $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ si ha $[t_\alpha x] = [t_\alpha y] = 0$. Come si è visto in 3), è possibile scegliere x e y in modo che sia $\kappa(x,y) \neq 0$, ovvero, alterando se necessario x o y per uno scalare, $\kappa(x,y) = 1$, così che si abbia $[xy] = t_\alpha$. Guardando i brackets $[t_\alpha x]$, $[t_\alpha y]$, $[xy]$ si riconosce subito che il sottospazio M di L generato da x, y, e t_α è una sottoalgebra risolubile di L (isomorfa all'algebra di Heisenberg, cf. I, 2.). $\operatorname{ad}_L M$ è una sottoalgebra risolubile di gl(L), isomorfa a M. Segue allora (cfr. il Teorema di Lie e i suoi corollari) che ogni elemento di $[\operatorname{ad}_L M, \operatorname{ad}_L M] = \operatorname{ad}_L [MM]$ è nilpotente. In particolare $\operatorname{ad}_L t_\alpha$ è nilpotente. D'altra parte $t_\alpha \in H$, e dunque $\operatorname{ad}_L t_\alpha$ è semisemplice. Si conclude che $\operatorname{ad}_L t_\alpha = 0$, cioè $t_\alpha = 0$, contraddizione.

5) Sappiamo (cf.3)) che, se $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, $\kappa(x,L_{-\alpha}) \neq \underline{0}$. E' perciò possibile trovare $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tale che $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 2/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$. Segue allora da 3) che $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. Si ha poi $[h_\alpha x_\alpha] = (2/\kappa(t_\alpha, t_\alpha))[t_\alpha x_\alpha] = (2/\alpha(t_\alpha))\alpha(t_\alpha) x_\alpha = 2x_\alpha$, e in modo simile si ottiene $[h_\alpha y_\alpha] = -2y_\alpha$. Si conclude che x_α, y_α e h_α generano una sottoalgebra 3-dimensionale di L con la stessa tavola di sl(2,F) e base standard (x_α, y_α, h_α), donde l'asserto.

6) t_α è definito da $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha,h)$, $\forall\, h \in H$. Ne segue che $t_{-\alpha} = -t_\alpha$. Per la definizione di h_α, si ha l'asserto.

Sia ora $\alpha \in \Phi$. Ci chiediamo : per quali scalari $0 \neq c \in F$, $c\alpha \in \Phi$?

Per rispondere a questa domanda, consideriamo, mantenendo le notazioni del punto 5) della Proposizione 3, la sottoalgebra di L generata da x_α, y_α, e h_α. Posto $S_\alpha = < x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha >$, sappiamo che S_α è isomorfa a sl(2,F). Siamo in grado di descrivere tutte le rappresentazioni finito-dimensionali di S_α, e in particolare la rappresentazione $ad_{L|S\alpha} : S_\alpha \to ad_L S_\alpha \subseteq gl(L)$. Consideriamo dunque L come S_α-modulo (associato a $ad_{L|S\alpha}$). Denotiamo con N il sottospazio di L generato da H e dagli spazi radicali $L_{c\alpha}$ ($c \in F - \{0\}$). Si riconosce subito che $N = H \oplus (\Sigma L_{c\alpha})$ è un S_α-sottomodulo di L (perchè $[x_\alpha H] \subseteq L_\alpha$, $[y_\alpha H] \subseteq L_{-\alpha}$, $[h_\alpha H] = \underline{0}$, $[x_\alpha L_{c\alpha}] \subseteq L_{(c+1)\alpha}$, $[y_\alpha L_{c\alpha}] \subseteq L_{(c-1)\alpha}$, $[h_\alpha L_{c\alpha}] \subseteq L_{c\alpha}$). Possiamo calcolare i pesi di h_α su N. Osservando che, per ogni $x \in L_{c\alpha}$, si ha $[h_\alpha x] = 2[t_\alpha x]/\alpha(t_\alpha) = 2(c\alpha(t_\alpha)/\alpha(t_\alpha))x = 2cx$, concludiamo che i pesi di h_α su N sono dati dallo 0 (con molteplicità uguale alla dimensione di H), e dagli interi $2c = \neq 0$. Notiamo ora che: 1) Ker α è un sottomodulo (banale) di N ($\forall\, u \in \text{Ker}\, \alpha$, $[x_\alpha u] = -\alpha(u)x_\alpha = 0$, $[y_\alpha u] = \alpha(u)y_\alpha = 0$, e infine $[h_\alpha u] = 0$); 2) S_α è un sottomodulo di N (irriducibile , i pesi di h_α su S_α essendo 0, 2, -2, con molteplicità 1). Poichè $\alpha(h_\alpha) = 2$ (cf. 4)) è dunque $H = \text{Ker}\, \alpha \oplus < h_\alpha >$, e per il Teorema di Weyl $N = (\text{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha) \oplus P$, con P sottomodulo di N . Supponiamo $P \neq \underline{0}$. Poichè il peso 0 ha molteplicità uguale alla dimensione di H , i pesi di h_α su P sono tutti diversi da zero . Ne segue (cf. 9.) che tali pesi sono tutti dispari, e dunque gli unici pesi pari di h_α su N sono 0, 2, -2. Ciò ha come conseguenza che 2α non è una radice (in caso contrario, $2c = 2 \cdot 2 = 4$ sarebbe un peso per h_α su N) . Ma allora nemmeno $(1/2)\alpha$ è una radice (altrimenti, per il ragionamento appena fatto, $2(1/2)\alpha = \alpha$ non potrebbe essere una radice), così che $2(1/2) = 1$ non può essere un peso , e dunque $P = \underline{0}$, ovvero $N = (\text{Ker}\, \alpha \oplus S_\alpha)$. In particolare, possiamo concludere che , *per ogni radice* α *: 1) gli unici multipli di* α *che sono radici sono* α *e* $-\alpha$ *;* 2) essendo $H + L_\alpha + L_{-\alpha} = H + < x_\alpha, y_\alpha >$, L_α *è un sottospazio 1-dimensionale di L .*

Esaminiamo ora l'azione di S_α sugli spazi radicali L_β, con $\beta \neq \pm\, \alpha$. A tale scopo, poniamo $R = \sum_{i \in \mathbf{Z}} L_{\beta + i\alpha}$ e proviamo che R è un S_α-sottomodulo *irriducibile* di L. Innanzitutto, notiamo che, per ogni $i \in \mathbf{Z}$, si ha $[x_\alpha L_{\beta+i\alpha}] \subseteq L_{\beta+(i+1)\alpha}$, $[y_\alpha L_{\beta+i\alpha}] \subseteq L_{\beta+(i-1)\alpha}$, $[h_\alpha L_{\beta+i\alpha}] \subseteq L_{\beta+i\alpha}$. Dunque R è un sottomodulo di L. Posto $L_{\beta+i\alpha} = < x_{\beta+i\alpha} >$ per tutti gli $i \in \mathbf{Z}$ tali che $L_{\beta+i\alpha} \neq \underline{0}$, si ha poi $[h_\alpha x_{\beta+i\alpha}] = (\beta+i\alpha)(h_\alpha)x_{\beta+i\alpha} = (\beta(h_\alpha) + 2i)x_{\beta+i\alpha}$ (essendo $\alpha(h_\alpha) = 2$). Dunque h_α decompone R nella somma diretta degli spazi-peso 1-dimensionali $R_{\beta(h\alpha)+2i} = L_{\beta+i\alpha}$ ($\beta+i\alpha \in \Phi$), relativi ai pesi $\beta(h_\alpha)+2i$. Poichè tali pesi sono interi distinti fra loro congrui mod 2, 0 e 1 non possono comparire entrambi come pesi per h_α su R, e (cfr. 9., Corollario 1) R è irriducibile. Ne segue che se q (risp. r) è il massimo intero tale che $\beta+q\alpha$ (risp. $\beta-r\alpha$) sia una radice, il *peso più alto* di R è $\beta(h_\alpha)+2q$ (e il *peso più basso* di R è $\beta(h_\alpha)-2r$). Inoltre, in forza di 9., Teorema 1 , i pesi su R formano una progressione aritmetica di ragione 2. In altre parole, per *ogni* i con $-r \leq i \leq q$ $\beta(h_\alpha)+2i$ è un peso, ovvero le radici $\beta-r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta+q\alpha$ formano una catena (la *α-catena passante per β*) che non ha "lacune". Si ha poi, in particolare, per la simmetria di R, $\beta(h_\alpha)-2r = -(\beta(h_\alpha)+2q)$, donde $\beta(h_\alpha) = r - q$. Infine (cf. 9. , Lemma 2, iii)), notiamo che se $\alpha + \beta \in \Phi$, e dunque x_β non è un vettore massimale in R, è $[x_\alpha x_\beta] \neq 0$, ovvero, avendo gli spazi radicali dimensione 1, $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
Per maggiore chiarezza, raccogliamo i risultati appena provati nella seguente :

Proposizione 4.

1) Per ogni $\alpha \in \Phi$, lo spazio radicale L_α ha dimensione 1. In particolare, per ogni $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, vi è un unico $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tale che $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$, e $S_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle = L_\alpha + L_{-\alpha} + [L_\alpha L_{-\alpha}]$.

2) Per ogni $\alpha \in \Phi$, gli unici multipli di α che sono radici sono $\pm \alpha$.

3) Siano $\alpha, \beta \in \Phi$, con $\beta \neq \pm \alpha$, e siano r, q i massimi interi per i quali $\beta - r\alpha$, $\beta + q\alpha$ rispettivamente siano radici. Allora per ogni i con $-r \leq i \leq q$ $\beta + i\alpha$ è una radice. (Diremo che queste radici formano la **α-catena passante per β**.)

4) Per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta(h_\alpha) \in$ **Z**. *Precisamente: $\alpha(h_\alpha) = 2$, e, se $\beta \neq \pm\alpha$, $\beta(h_\alpha) = r - q$. In particolare: per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. (Gli interi $\beta(h_\alpha)$ sono detti* **interi di Cartan**.)

5) Se $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, $[L_\alpha L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Osservazione :

Poichè Φ genera H*, segue subito da C) che $\{t_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ genera H. Segue allora dal punto 3) della Proposizione 3, che *L è generata (come algebra di Lie) dagli spazi radicali L_α*.

E) Realizzazione di Φ come sistema di radici di uno spazio euclideo reale

Mediante l'isomorfismo canonico fra H e H* introdotto in C), che fa corrispondere a ogni $\phi \in H^*$ l'elemento t_ϕ di H, possiamo per trasporto di struttura definire su H* la forma bilineare simmetrica non-degenere (,) ponendo :

$$(\phi, \psi) = \kappa(t_\phi, t_\psi) \quad \forall\, \phi, \psi \in H^* .$$

La forma (,) può anche essere utilmente espressa mediante la formula :

$$(\phi, \psi) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \phi)(\alpha, \psi) .$$

Infatti, per ogni a, b $\in$ H, $x \in L_\alpha$, $\alpha \in H^*$, è $(\text{ad } a \cdot \text{ad } b)x = (\alpha(a)\,\alpha(b))x$, da cui, considerando la decomposizione di Cartan $L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$, si ottiene $\kappa(a, b) = \mathrm{Tr}(\text{ad } a \cdot \text{ad } b) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(a)\,\alpha(b)$. Segue appunto $(\phi, \psi) = \kappa(t_\phi, t_\psi) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\phi)\,\alpha(t_\psi) = \sum_{\alpha \in \Phi} \kappa(t_\alpha, t_\phi)\kappa(t_\alpha, t_\psi) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \phi)(\alpha, \psi)$.

Osserviamo infine che, per come si è definita (,), per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta(h_\alpha) = \kappa(t_\beta, h_\alpha) = \kappa(t_\beta, 2t_\alpha/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)) = (2/\kappa(t_\alpha, t_\alpha))\kappa(t_\beta, t_\alpha) = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Z}$, per il pto 4) della Proposizione 4.

Identifichiamo ora il sottocampo primo di F con il campo razionale **Q**, e denotiamo con $E_\mathbf{Q}$ il **Q**-sottospazio di H* generato da Φ. Si ha allora :

Proposizione 5. *i) $\dim_\mathbf{Q} E_\mathbf{Q} = \dim_F H^*$;*
ii) per ogni $\phi, \psi \in E_\mathbf{Q}$, $(\phi, \psi) \in \mathbf{Q}$, e la restrizione di (,) a $E_\mathbf{Q}$ è una forma definita positiva su $E_\mathbf{Q}$.

Dim.

i) Poichè chiaramente $\dim_\mathbf{Q} E_\mathbf{Q} \geq \dim_F H^*$, basterà provare che, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è una base di H* contenuta in Φ, ogni $\beta \in \Phi$ è una combinazione lineare di $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ con coefficienti in **Q**. Sia dunque $\beta = \sum c_i \alpha_i$, così che $(\beta, \alpha_j) = \sum c_i (\alpha_i, \alpha_j)$ per $j = 1, \ldots, n$. Si consideri il sistema di equazioni lineari nelle incognite c_i :

$$(*) \quad 2(\beta, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \sum 2((\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j))c_i \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Per quanto visto sopra, (*) è un sistema a coefficienti razionali (anzi interi). Inoltre, poichè (,) è non-degenere e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è una base di H*, la matrice $X = ((\alpha_i, \alpha_j))$ è non-singolare, e dunque è non-singolare anche la matrice del sistema (*). Si conclude che (*) ha una (unica) soluzione in $\mathbf{Q}$.

ii) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) = \alpha(h_\beta) = m_\alpha \in \mathbf{Z}$ (Proposizione 4, 4)). Segue allora che, per ogni $\beta \in \Phi$, si ha $(\beta, \beta) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha, \beta)^2 = \sum_{\alpha\in\Phi} (m_\alpha/2)^2(\beta, \beta)^2$. Poichè $(\beta, \beta) = \kappa(t_\beta, t_\beta) \neq 0$ (cf. Prop.3, 4)), $\sum_{\alpha\in\Phi} (m_\alpha)^2 \neq 0$, e dunque $(\beta, \beta) = 4/\sum_{\alpha\in\Phi} (m_\alpha)^2 \in \mathbf{Q}$. Si conclude che $(\alpha, \beta) = (m_\alpha/2)(\beta, \beta) \in \mathbf{Q}$ per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, donde $(\phi, \psi) \in \mathbf{Q}$ per ogni $\phi, \psi \in E_\mathbf{Q}$, essendo ϕ e ψ combinazioni lineari di elementi di Φ a coefficienti in $\mathbf{Q}$. Infine , per ogni $\phi \in E_\mathbf{Q}$, $(\phi, \phi) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha, \phi)^2 \geq 0$, e $(\phi, \phi) = 0$ sse $(\alpha, \phi) = 0$ $\forall\, \alpha \in \Phi$, cioè $\phi = 0$, dal momento che Φ genera H*.

Ora, "ampliamo il campo degli scalari" da $\mathbf{Q}$ al campo reale $\mathbf{R}$, i.e. consideriamo lo spazio reale $E_\mathbf{R} = \mathbf{R} \otimes E_\mathbf{Q}$. Ogni base $(e_1, \ldots, e_n)$ di $E_\mathbf{Q}$ dà luogo a una base $(1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n)$ di $E_\mathbf{R}$, e pertanto $\dim_\mathbf{R} E_\mathbf{R} = \dim_\mathbf{Q} E_\mathbf{Q} = \dim_F H^*$. Inoltre, il metodo di riduzione di Lagrange per le matrici simmetriche assicura che esiste in $E_\mathbf{Q}$ una base rispetto alla quale la matrice di (,) è una matrice diagonale $\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ a elementi positivi. Ne consegue che (,) si estende a una forma bilineare simmetrica definita positiva su $E_\mathbf{R}$, e dunque $E = (E_\mathbf{R}, (,))$ è uno *spazio euclideo reale* (generato da Φ).

Le proprietà fondamentali di Φ, considerato come sottoinsieme di E, sono riassunte nel seguente :

Teorema.
i) Φ *è un insieme finito di generatori non-nulli di E ;*
ii) *Se* $\alpha \in \Phi$*, gli unici multipli di* α *che appartengono a* Φ *sono* α *e* $-\alpha$ *;*
iii) *Per ogni* $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta - 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)\alpha \in \Phi$*;*
iv) *Per ogni* $\alpha, \beta \in \Phi$, $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Z}$.

Queste proprieta' definiscono cio' che si usa chiamare un *sistema di radici (ridotto)* in uno spazio euclideo. Le argomentazioni precedenti ci mostrano che ad ogni coppia (L,H) costituita da un'algebra di Lie semisemplice L e da una sua sottoalgebra torica massimale H si può associare una coppia (Φ,E), ove Φ è un sistema di radici nello spazio euclideo E. Alla classificazione dei sistemi di radici e' dedicato il prossimo capitolo.